Задание вступительного испытания по математике

1. Пусть $f(x) = x^3 + \cos\frac{\pi}{10}$. Вычислите: $f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)$.

2. Из пункта B в пункт A выехал пассажирский поезд со скоростью 60 километров в час. Через 2 часа из пункта A в пункт B по той же железной дороге выехал скорый поезд со скоростью 90 километров в час. Расстояние между пунктами A и B по этой железной дороге равно 420 км. На каком расстоянии от B встретятся эти поезда? (Поезда едут без остановок.)

3. Решите уравнение:
$$2 \cdot (11 - \cos^2 x) = (22\sin 2x - \operatorname{tg} x) \cdot \sin 2x.$$

4. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2 \cdot 5^x + 2^y = 20, \\ x \cdot \log_7 5 + y \cdot \log_{49} 4 = \log_7 18. \end{cases}$$

5. Четырехугольник вписан в окружность. Его стороны последовательно имеют длины 9 см, 2 см, 8 см, 3 см. Найдите площадь этого четырехугольника.

6. Решите неравенство:
$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \leq \sqrt{3x^2 - 3x + 6} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

1. Пусть $f(x) = x^3 + \cos\frac{\pi}{10}$. Вычислите: $f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)$.

Решение.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cos\frac{\pi}{10} - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cos\frac{\pi}{10}\right) = \frac{27}{8} - \frac{1}{64} = \frac{215}{64}.$$

Ответ: $\frac{215}{64}$.

2. Из пункта B в пункт A выехал пассажирский поезд со скоростью 60 километров в час. Через 2 часа из пункта A в пункт B по той же железной дороге выехал скорый поезд со скоростью 90 километров в час. Расстояние между пунктами A и B по этой железной дороге равно 420 км. На каком расстоянии от B встретятся эти поезда? (Поезда едут без остановок.)

Решение.

Пусть t (часов) – время, по истечение которого поезда встретятся (начало отсчета времени – начало движения скорого поезда). Тогда

$$60(2 + t) + 90t = 420 \Leftrightarrow 150t = 300 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (часа)}.$$

Искомое расстояние – расстояние, которое проехал пассажирский поезд от пункта B до места встречи:

$$s = 60(2 + t) = 60 \cdot 4 = 240 \text{ (км)}.$$

Ответ: 240 км.

3. Решите уравнение:

$$2 \cdot (11 - \cos^2 x) = (22 \sin 2x - \operatorname{tg} x) \cdot \sin 2x.$$

Решение.

$$2 \cdot (11 - \cos^2 x) = (22 \sin 2x - \operatorname{tg} x) \cdot \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad 22 - 2\cos^2 x = 22 \sin^2 2x - 2 \cdot \operatorname{tg} x \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22 - 22\sin^2 2x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 11\cos^2 2x = \cos 2x \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x(11\cos 2x - 1) = 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{11} \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{11} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm \arccos\frac{1}{11} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{11} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{11} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 5^x + 2^y = 20, \\ x \cdot \log_7 5 + y \cdot \log_{49} 4 = \log_7 18. \end{cases}$$

Решение.

$$x \cdot \log_7 5 + y \cdot \log_{49} 4 = \log_7 18 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \log_7 5 + y \cdot \log_7 2 = \log_7 18 \quad \Leftrightarrow \quad \log_7 5^x + \log_7 2^y = \log_7 18$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_7(5^x \cdot 2^y) = \log_7 18 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x \cdot 2^y = 18.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2 \cdot 5^x + 2^y = 20 \\ x \cdot \log_7 5 + y \cdot \log_{49} 4 = \log_7 18. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 \cdot 5^x + 2^y = 20 \\ 5^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$$

Произведем замену: $u = 5^x$, $v = 2^y$.

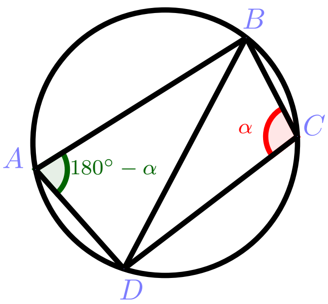
$$\begin{cases} 2u + v = 20 \\ uv = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 20 - 2u \\ u(20-2u) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 20 - 2u \\ u^2 - 10u + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 20 - 2u \\ \left[\begin{array}{l} u = 9 \\ u = 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 9 \\ v = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 18 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5^x = 9 \\ 2^y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5^x = 1 \\ 2^y = 18 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \log_5 9 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = \log_2 18 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Ответ: $(\log_5 9; 1)$, $(0; \log_2 18)$.

5. Четырехугольник вписан в окружность. Его стороны последовательно имеют длины 9 см, 2 см, 8 см, 3 см. Найдите площадь этого четырехугольника.

Решение.



Пусть $AB = 9$, $BC = 2$, $CD = 8$, $AD = 3$. Так как четырехугольник вписан в окружность, то $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. Пусть $\angle BCD = \alpha$, тогда $\angle BAD = 180° - \alpha$.

Применим теорему косинусов в треугольниках BAD и BCD:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos(180° - \alpha)$$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos\alpha$$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos(180° - \alpha) = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AD^2 + 2AB \cdot AD \cos\alpha = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow 90 + 54\cos\alpha = 68 - 32\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 86\cos\alpha = -22 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = -\tfrac{11}{43}.$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\tfrac{11}{43}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{43^2 - 11^2}{43^2}} = \tfrac{24\sqrt{3}}{43}.$$

$$S_{BCD} = \tfrac{1}{2} BC \cdot CD \sin\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \tfrac{24\sqrt{3}}{43} = \tfrac{192\sqrt{3}}{43}.$$

$$S_{BAD} = \tfrac{1}{2} AB \cdot AD \sin(180° - \alpha) = \tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \tfrac{24\sqrt{3}}{43} = \tfrac{324\sqrt{3}}{43}.$$

$$S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{BAD} = \tfrac{192\sqrt{3}}{43} + \tfrac{324\sqrt{3}}{43} = \tfrac{516\sqrt{3}}{43} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$.

6. Решите неравенство:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 - x - 2} \le \sqrt{3x^2 - 3x + 6} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

Решение.

$$\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-x-2}\leq\sqrt{3x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-5x+6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2-5x+6}\leq\sqrt{3x^2-3x+6}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2-5x+6})^2\leq(\sqrt{3x^2-3x+6})^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x+2)+(x^2-x-2)+(x^2-5x+6)+$$

$$+2\sqrt{x^2+3x+2}\sqrt{x^2-x-2}+2\sqrt{x^2+3x+2}\sqrt{x^2-5x+6}+2\sqrt{x^2-x-2}\sqrt{x^2-5x+6}\leq 3x^2-3x+6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{x^2+3x+2}\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{x^2-x-2}\sqrt{x^2-5x+6}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2+3x+2=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} x^2+3x+2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=-2,-1,2 \\ x=-2,-1,2,3 \\ x=-1,2,3 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: -1, 2.