

ВАРИАНТ 1

1. Вычислите:

$$\frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2).$$

Решение. Применяя формулу сумму кубов получим

$$\begin{aligned} \frac{12,5^3 + 1,2^3}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2) &= \frac{(12,5 + 1,2)(12,5^2 - 12,5 \cdot 1,2 + 1,2^2)}{13,7} - (12,5^2 + 1,2^2) = \\ &= 12,5^2 - 12,5 \cdot 1,2 + 1,2^2 - 12,5^2 - 1,2^2 = -12,5 \cdot 1,2 = -15. \end{aligned}$$

Ответ. -15 .

2. Докажите, что число

$$K = \frac{3}{\sqrt{10} + 1} + \frac{1}{\sqrt{10} - 2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

целое, и найдите его.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{10} + 1} + \frac{1}{\sqrt{10} - 2} - \frac{\sqrt{10}}{2} &= \frac{3(\sqrt{10} - 1)}{(\sqrt{10} + 1)(\sqrt{10} - 1)} + \frac{\sqrt{10} + 2}{(\sqrt{10} - 2)(\sqrt{10} + 2)} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{10} - 1}{3} + \frac{\sqrt{10} + 2}{6} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{2(\sqrt{10} - 1) + \sqrt{10} + 2 - 3\sqrt{10}}{6} = \frac{0}{6} = 0. \end{aligned}$$

Ответ. 0 .

3. Найдите числовое значение выражение $S = a^3b^2 + a^2b^3$, где a и b – корни квадратного уравнения

$$4x^2 - 19x + 16 = 0.$$

Решение. По теореме Виета $a + b = -\frac{-19}{4} = \frac{19}{4}$, $ab = \frac{16}{4} = 4$.

Поэтому

$$S = a^3b^2 + a^2b^3 = (ab)^2(a + b) = 4^2 \cdot \frac{19}{4} = 4 \cdot 19 = 76.$$

Ответ. 76 .

4. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} \pi x^2 \cdot \operatorname{tg} \left(2\pi x + \frac{\pi}{3} \right) = 1,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leq 1$.

Решение.

Найдем сначала все решения уравнения. Поделив обе части уравнения на $\operatorname{tg}(2\pi x + \frac{\pi}{3})$ получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \pi x^2 \cdot \operatorname{tg} (2\pi x + \frac{\pi}{3}) = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \pi x^2 = \operatorname{ctg} (2\pi x + \frac{\pi}{3}) \\ 2\pi x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \pi x^2 = \operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - 2\pi x - \frac{\pi}{3}) \\ 2\pi x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \pi x^2 = \operatorname{tg} (\frac{\pi}{6} - 2\pi x) \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x^2 = \frac{\pi}{6} - 2\pi x + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - (\frac{1}{6} + n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 2x - (\frac{1}{6} + n) = 0$. Дискриминант уравнения $D = 4 + 4(\frac{1}{6} + n) = 4(\frac{7}{6} + n)$. Значит уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $D \geq 0 \Leftrightarrow n \geq -\frac{7}{6}$.

$$\text{Сами корни уравнения } x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{n + \frac{7}{6}}}{2} = -1 \pm \sqrt{n + \frac{7}{6}}.$$

Возвращаясь к системе получим

$$\begin{cases} x^2 + 2x - (\frac{1}{6} + n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{n + \frac{7}{6}}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq -1 \\ x \neq \frac{1}{12} + \frac{k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{n + \frac{7}{6}}, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq -1.$$

Отберем теперь среди найденных решений те, которые удовлетворяют неравенству $|x| \leq 1$.

Ясно, что решения $x = -1 - \sqrt{n + \frac{7}{6}} < -1$ при всех допустимых целых значениях n . Поэтому эти решения не удовлетворяют неравенству $|x| \leq 1$.

Осталось выяснить при каких n решения $x = -1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}}$ удовлетворяют неравенству $|x| \leq 1$:

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| -1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{n + \frac{7}{6}} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq n + \frac{7}{6} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq n + \frac{7}{6} \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{17}{6} \Leftrightarrow n = -1, 0, 1, 2.$$

Ответ. $-1 + \sqrt{n + \frac{7}{6}}, n = -1, 0, 1, 2$.

5. Решите неравенство

$$(4 - 2^{4x - x^2 - 2}) \cdot \log_{x^2}(3 - \sqrt{2 + x^2}) \geq 0.$$

Решение.

$$(4 - 2^{4x - x^2 - 2}) \cdot \log_{x^2}(3 - \sqrt{2 + x^2}) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4 - 2^{4x - x^2 - 2} \geq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2 + x^2}) \geq 0 \\ 4 - 2^{4x - x^2 - 2} \leq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2 + x^2}) \leq 0 \end{cases} \right]$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4x - x^2 - 2 \leq 2 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 \\ 4x - x^2 - 2 \geq 2 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \leq 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 \\ (x-2)^2 \leq 0 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \leq 0 \end{cases} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq 0 \\ x = 2 \\ \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \leq 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \log_{x^2}(3 - \sqrt{2+x^2}) \geq \log_{x^2} 1 \\ x = 2 \end{cases} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 > 1 \\ 3 - \sqrt{2+x^2} \geq 1 \\ 0 < x^2 < 1 \\ 0 < 3 - \sqrt{2+x^2} \leq 1 \\ x = 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 > 1 \\ \sqrt{2+x^2} \leq 2 \\ 0 < x^2 < 1 \\ 2 \leq \sqrt{2+x^2} < 3 \\ x = 2 \end{cases} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 > 1 \\ 2+x^2 \leq 4 \\ 0 < x^2 < 1 \\ 4 \leq 2+x^2 < 9 \\ x = 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 1 < x^2 \leq 2 \\ x = 2 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} -\sqrt{2} \leq x < -1 \\ 1 < x \leq \sqrt{2} \\ x = 2 \end{cases} \right].
\end{aligned}$$

Ответ. $[-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}] \cup \{2\}$.

6. Произведение первых четырех членов убывающей неотрицательной геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равно 1. Сумма квадратов этих членов равна $85/8$. Найдите: $b_1 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_4$.

Решение.

Пусть q – знаменатель прогрессии. Из условия следует, что $0 < q < 1$ и

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} b_1 b_2 b_3 b_4 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = \frac{85}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(b_1 q)(b_1 q^2)(b_1 q^3) = 1 \\ b_1^2 + (b_1 q)^2 + (b_1 q^2)^2 + (b_1 q^3)^2 = \frac{85}{8} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b_1^4 q^6 = 1 \\ b_1^2 q^3 \left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 \right) = \frac{85}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1^2 q^3 = 1 \\ \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 = \frac{85}{8}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Преобразуем левую часть второго уравнения, используя формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 = \left(\frac{1}{q} + q \right) + \left(\frac{1}{q^3} + q^3 \right) = \left(\frac{1}{q} + q \right) + \left(\frac{1}{q} + q \right) \left(\frac{1}{q^2} - 1 + q^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{q} + q \right) + \left(\frac{1}{q} + q \right) \left(\frac{1}{q^2} + 2 + q^2 - 3 \right) = \left(\frac{1}{q} + q \right) + \left(\frac{1}{q} + q \right) \left(\left(\frac{1}{q} + q \right)^2 - 3 \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q} + q + q^3 = \frac{85}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{q} + q \right) + \left(\frac{1}{q} + q \right) \left(\left(\frac{1}{q} + q \right)^2 - 3 \right) = \frac{85}{8}.$$

Произведем замену $x = \frac{1}{q} + q$ и получим

$$x + x(x^2 - 3) = \frac{85}{8} \Leftrightarrow x^3 - 2x = \frac{85}{8} \Leftrightarrow 8x^3 - 16x - 85 = 0.$$

Выполним еще одну замену $t = 2x$ и получим уравнение:

$$t^3 - 8t - 85 = 0.$$

По теореме о целых корнях приведенного многочлена с целыми коэффициентами целые корни данного уравнения являются делителями свободного коэффициента. Переберем делители свободного коэффициента -85 : $\pm 1, \pm 5, \pm 17, \pm 85$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $t = 5$ является корнем уравнения.

Значит многочлен $t^3 - 8t - 85$ делится на $t - 5$. Поделив $t^3 - 8t - 85$ на $t - 5$ получим $t^3 - 8t - 85 = (t - 5)(t^2 + 5t + 17)$. Квадратный трехчлен $t^2 + 5t + 17$ не имеет корней, так как его дискриминант $D = 25 - 68 < 0$.

Следовательно,

$$t^3 - 8t - 85 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(t^2 + 5t + 17) = 0 \Leftrightarrow t = 5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{q} + q = \frac{5}{2}.$$

Вычислим теперь искомое выражение

$$b_1 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_4 = b_1 \cdot b_1 q + b_1 q^2 \cdot b_1 q^3 = b_1^2 q^3 \left(\frac{1}{q^2} + q^2 \right) = b_1^2 q^3 \left(\left(\frac{1}{q} + q \right)^2 - 2 \right) = \frac{25}{4} - 2 = \frac{17}{4}.$$

Ответ. $\frac{17}{4}$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) основание $AC = 10\sqrt{6}$. На стороне BC выбрана точка Q так, что $BQ : QC = 3 : 7$ и $S_{AQC} = 140$. На стороне AB выбрана точка P так, что $S_{PBQ} = 30$. Найдите длину отрезка PQ .

Решение.

1) Рассмотрим отношение площадей

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{AQC}} = \frac{BQ}{QC} = \frac{3}{7} \Rightarrow S_{ABQ} = \frac{3}{7} S_{AQC} = \frac{3}{7} \cdot 140 = 60.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{AQC} = 60 + 140 = 200.$$

2) Пусть $AB = x$. Тогда полупериметр треугольника ABC

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(2x + 10\sqrt{6}) = x + 5\sqrt{6}.$$

По формуле Герона получим

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = 200$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + 5\sqrt{6}) \cdot 5\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6} \cdot (x - 5\sqrt{6})} = 200$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{x^2 - 150} = 200 \Rightarrow 6(x^2 - 150) = 1600$$

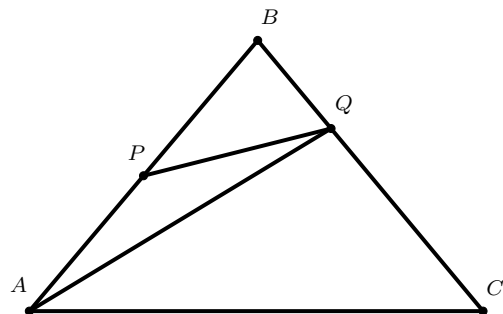
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1250}{3} \Rightarrow AB = BC = x = \frac{25\sqrt{6}}{3}.$$

3) По теореме косинусов в треугольнике ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1250}{3} - 2 \cdot \frac{1250}{3} \cdot \cos \angle B = 600$$

$$\Rightarrow \frac{2500}{3} \cdot \cos \angle B = \frac{700}{3} \Rightarrow \cos \angle B = \frac{7}{25}.$$



4) Рассмотрим отношение

$$\frac{PB}{AB} = \frac{S_{PBQ}}{S_{ABQ}} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow PB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{6}}{3} = \frac{25\sqrt{6}}{6}.$$

Поскольку $BQ : QC = 3 : 7$, то

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{3}{10} \Rightarrow BQ = \frac{3}{10}BC = \frac{3}{10} \cdot \frac{25\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

5) По теореме косинусов в треугольнике PBQ

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos \angle B = \\ &= \left(\frac{25\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{25\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \cos \angle B = \frac{425}{3} - 125 \cdot \cos \angle B = \\ &= \frac{425}{3} - 35 = \frac{320}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$PQ = \sqrt{\frac{320}{3}} = \frac{8\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ. $\frac{8\sqrt{15}}{3}$.

8. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6\sqrt{2}$. Высота призмы $BB_1 = 6\sqrt{2}$. В каком отношении общий перпендикуляр двух скрещивающихся диагоналей BA_1 и CB_1 делит диагональ BA_1 ?

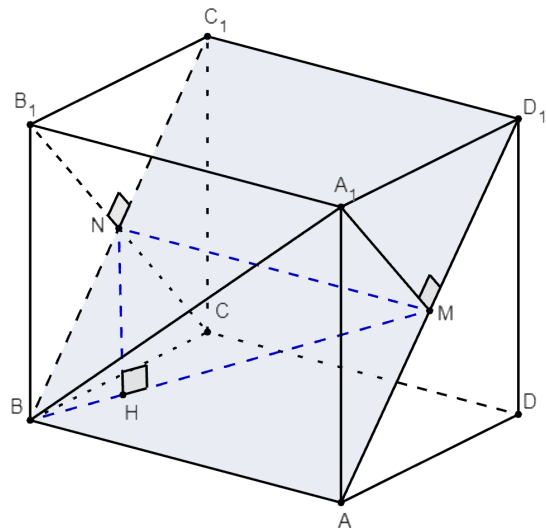
Решение.

1) Спроектируем диагонали BA_1 и CB_1 на плоскость $ABC_1 D_1$. Диагональ CB_1 перпендикулярна плоскости $ABC_1 D_1$, так как CB_1 перпендикулярна BC_1 , как диагонали квадрата $BB_1 C_1 C$ и сторона AB перпендикулярна плоскости $BB_1 C_1 C$. Поэтому проекция диагонали CB_1 на плоскость $ABC_1 D_1$ – N – точка пересечения диагоналей CB_1 и BC_1 (середина каждой из диагоналей). По тем же соображениям проекция точки A_1 на плоскость $ABC_1 D_1$ – точка M – середина AD_1 . Поэтому проекция BA_1 на плоскость $ABC_1 D_1$ – отрезок BM .

2) Рассмотрим прямоугольник $ABC_1 D_1$. $BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{72 + 72} = 12$. Следовательно, $BN = \frac{BC_1}{2} = 6$.

Опустим перпендикуляр NH с точки N на отрезок BM . По свойству проекций построенный перпендикуляр делит отрезок BM в таком же отношении, как и общий перпендикуляр двух диагоналей BA_1 и CB_1 делит диагональ BA_1 .

3) Рассмотрим прямоугольный треугольник BNM . $BM = \sqrt{BN^2 + MN^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$. Высота прямого угла $NH = \frac{BN \cdot MN}{BM} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$.



В треугольнике NHM катет $HM = \sqrt{MN^2 - NH^2} = \sqrt{64 - \frac{576}{25}} = \frac{32}{5}$. Значит $BH = BM - HM = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}$.

Следовательно, $BH : HM = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{32}{5}} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$.

Ответ. $9 : 16$.