

Олимпиада школьников  
Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова  
по математике  
заключительный этап (09.12.2023)

Вариант 23-11

1. Решить уравнение:

$$x^y + y^x = 945$$

для натуральных  $x$  и  $y$ .

2. Решите систему:

$$\begin{cases} \frac{ab}{a+b} = 1 \\ \frac{bc}{b+c} = 2 \\ \frac{ac}{a+c} = 3 \end{cases}$$

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x) = 3\cos^4 x - 14\cos^3 x - 21\sin^2 x - 12\cos x$$

4. Решите уравнение:

$$\log_x |2x^2 - 3| = 4\log_{|2x^2 - 3|} x$$

5. На одной из сторон острого угла с вершиной  $O$  взяты точки  $A$  и  $B$ , а на другой — точка  $M$ . При какой длине отрезка  $OM$  величина угла  $AMB$  максимальна, если  $OA = 1$ ,  $OB = 5$ ?

6. При каких  $b$  система уравнений:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a+b)^2 = 2 \\ (x-y+3)(x-y-1) = 0 \end{cases}$$

имеет решения при любых  $a$ ?

Олимпиада школьников  
Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова  
по математике  
заключительный этап (09.12.2023)

Вариант 23-12

1. Решить уравнение:

$$x^y + y^x = 1649$$

для натуральных  $x$  и  $y$ .

2. Решите систему:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1 \\ \frac{yz}{y+z} = 2 \\ \frac{xz}{x+z} = 4 \end{cases}$$

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x) = 3\sin^4 x + 10\sin^3 x + 3\cos^2 x - 12 \sin x$$

4. Решите уравнение:

$$\log_x |3x^2 - 4| = 4 \log_{|3x^2 - 4|} x.$$

5. На одной из сторон острого угла с вершиной  $O$  взяты точки  $A$  и  $B$ , а на другой — точка  $M$ . При какой длине отрезка  $OM$  величина угла  $AMB$  максимальна, если  $OA = 2$ ,  $OB = 3$ ?

6. При каких  $b$  система уравнений:

$$\begin{cases} (x - 2a)^2 + (y + 2a - b)^2 = 4,5 \\ (x - y + 4)(x + y - 2) = 0 \end{cases}$$

не имеет решения при любых  $a$ ?